

***ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ,  
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
ПО ПРОВЕДЕНИЮ  
II (МУНИЦИПАЛЬНОГО)  
ЭТАПА***

**2024**

*Оргкомитету и жюри муниципального этапа  
математической олимпиады школьников*

Уважаемые коллеги!

Система оценки решений задач традиционная, уже много лет применяющаяся на математической олимпиаде: каждая задача, независимо от ее трудности, оценивается из 7 баллов и каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7. Напоминаем, что при оценке решения по такой системе сначала дается ответ на принципиальный вопрос: верное оно (хотя, может быть, и с различными недостатками) или неверное (хотя, может быть, и с существенным продвижением). В первом случае оценка должна быть не ниже 4, во втором - не выше 3.

**В начале олимпиады** напомним участникам, что нужно не только приводить ответы, но и обосновывать их (в этом, по существу, и состоит решение задачи, а ответ – лишь его результат).

**Продолжительность олимпиады** составляет для 7-11 классов 3 часа 55 минут, не считая времени, потраченного на заполнение титульных листов работ и разъяснение условий задач.

После проверки необходимо обязательно провести показ работ, на котором каждый участник должен иметь возможность ознакомиться с результатами проверки своей работы. Время и место проведения показа работ необходимо объявить участникам заранее.

Просим вас провести разбор задач для участников олимпиады. Желательно сделать это в день олимпиады. Помните, что олимпиада по математике – это не только соревнование, но и способ приобщения школьников к красивой и удивительной науке, **МАТЕМАТИКЕ**.

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

**1. Решение каждой задачи оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи.** В случаях, не предусмотренных прямо дополнительными указаниями по проверке и оценке задачи (их можно найти после решений задач для каждой из параллелей), её решение оценивается по следующим общим правилам:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Решение считается *неполным* в следующих случаях:

- если оно содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- если оно при верной общей схеме рассуждений содержит пробелы, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- если оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых разобрана, но некоторые упущены.

**При расхождении между общими и дополнительными указаниями применяются дополнительные.**

**2.** При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за "нерациональность" решения (кроме отдельных редких случаев, когда такое прямо предусмотрено дополнительными указаниями по проверке данной задачи). **Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, пометки и т.п.**

**3.** Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, арифметические ошибки в *геометрической* или *алгебраической* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочётам.

**4.** Нужно постоянно ориентировать школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике для соответствующего класса. Умение хорошо изложить решение надо поощрять, но умение хорошо *догадываться* на олимпиаде всё же должно цениться выше.

### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА.

**7.1.** В левой части записи  $\text{САРАНСК} = 2025$  поставьте несколько знаков умножения, а вместо разных букв – разные цифры, одинаковых букв – одинаковые цифры, чтобы получилось верное числовое равенство.

**Ответ.** Например,  $1 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 1 \cdot 3$ .

**7.2.** В пакете 10 кг сахара. Как при помощи чашечных весов и одной 400-граммовой гири отвесить 2 кг сахара, если разрешается сделать только три взвешивания?

**Решение.**

При первом взвешивании положим на правую чашку 400 г и уравновесим весы с помощью сахара, тогда сахара на левой чашке будет 5200 г, а на правой — 4800 г. Теперь 4800 г разделим пополам: тогда на каждой чашке будет по 2400 г сахара. При третьем взвешивании отвесим с помощью гири 400 г сахара, тогда получим массу оставшегося сахара на одной из чашек  $2000 \text{ г} = 2 \text{ кг}$ .

**7.3.** Какое наибольшее количество натуральных чисел можно выбрать так, что для любых двух выбранных их сумма или разность – простое число?

**Ответ. 4.**

**Решение.**

**Пример.** 1, 3, 6, 8. Все разности простые числа.

**Оценка.** Если чисел хотя бы 5, то три из них одной чётности, два из этих трёх отличаются хотя бы на 4. У такой пары и сумма и разность – чётные числа, большие 2.

**7.4.** Дана шахматная доска размером  $2025 \times 2025$ . На ней Петя и Вася играют в следующую игру: они поочередно ставят (начинает Петя) новых шахматных коней на свободные клетки, не битые другими конями, выставленными к моменту хода. Проигрывает тот, кто не может сделать ход (другой выигрывает). У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

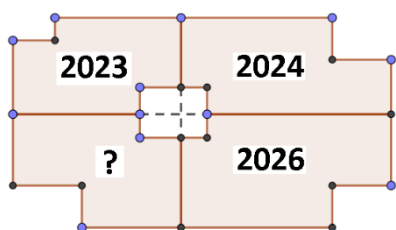
**Ответ.** Выигрывает Петя.

**Решение.**

Докажем, что у Пети есть выигрышная стратегия: первым своим ходом он поставит коня в центральную клетку доски, положим ее координаты  $(0,0)$ . Теперь, на каждый ход Васи в клетку  $(x, y)$  Петя будет отвечать поставленным конем в клетку  $(-x, -y)$ , то есть в симметричную относительно центральной. Заметим, что после хода Пети доска все время будет центрально симметричной, и если коня на клетке  $(-x, -y)$  бьет какой-то конь отличный от поставленного в клетку  $(x, y)$ , то симметричный ему относительно середины должен бить коня, поставленного Васей на этом ходе, чего не может быть. Также коня на клетке  $(-x, -y)$  не мог побить конь на клетке  $(x, y)$ , так как разности обеих координат клеток – четные числа, а бьющиеся кони имеют координаты, в одном направлении отличающиеся на 1 – значит, коня Пети никто не бьет. Таким образом, на любой ход Васи у Пети будет ответный ход, и в силу конечности клеток кто-то проиграет, значит, Петя победит.

**Замечание.** Имеются и другие возможные стратегии игры Пети. Так же, на любой доске вида  $n \times k$ , где  $n, k$  – нечетные числа, победит Петя, а если  $n, k$  – четные, то выиграет Вася.

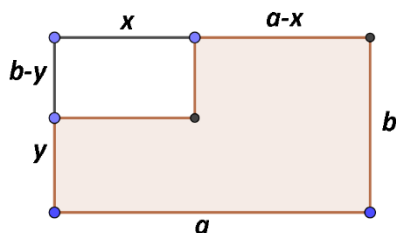
**7.5.**



Четыре участка имеют форму прямоугольников с вырезанными углами, стороны которых параллельны сторонам прямоугольников, и расположены так, как на рисунке. Периметры трёх участков равны 2023, 2024, 2026. Найдите периметр четвёртого участка.

Ответ. 2025.

Решение.



**Лемма 1.** Если в прямоугольнике вырезать угол, стороны которого параллельны сторонам прямоугольника, периметр не изменится.

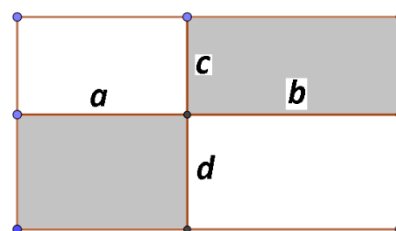
**Доказательство.**

Периметр прямоугольника равен  $2a + 2b$ .

Периметр фигуры после вырезания угла равен

$$a + b + a - x + b - y + x + y = 2a + 2b.$$

Оба периметра равны.



**Лемма 2.** Суммы периметров двух пар противоположных прямоугольников, на которые данный прямоугольник разбивается двумя отрезками, параллельными сторонам, равны.

**Доказательство.**

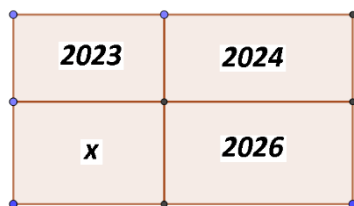
Сумма периметров закрашенных прямоугольников равна

$$2(a + d + b + c).$$

Сумма периметров незакрашенных прямоугольников равна

$$2(a + c + b + d).$$

Обе суммы равны.



По лемме 1 данные участки можно заменить прямоугольниками.

Обозначим искомый периметр через  $x$ .

По лемме 2

$$x + 2024 = 2023 + 2026.$$

Отсюда  $x = 2025$ .

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ (7 класс).

7.1. За верный пример – 7 баллов.

7.2. За правильное первое взвешивание – 3 балла.

За полное обоснованное решение – 7 баллов.

7.3. За верный пример – 2 балла. Оценка – 4 балла.

7.4. Только верный ответ – 0 баллов

Верное решение, отличное от авторского – баллы не снимать.

За объем написанного текста без каких-либо существенных результатов баллы не ставятся.

Далее идут возможные продвижения, оценивающиеся следующим образом:

Идея того, что Петя ставит первым своим ходом коня в центральную клетку – 2 балла.

Идея парной стратегии, но решение неверное – 3 балла.

Не пояснена корректность стратегии – не более 5 баллов.

В целом верное решение с незначительными ошибками / опечатками – штраф до 2 баллов. Баллы за продвижения суммируются.

7.5. За правильный ответ без обоснования – 1 бал.

Оба утверждения, используемые при решении задачи, должны быть доказаны. При отсутствии доказательств снять по 3 балла за каждое.

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА.

**8.1.** Докажите, что уравнение  $\frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} + \frac{7}{d} = 9$  не имеет решений в нечетных числах.

**Решение.**

Домножим обе части на общий знаменатель. Получим  $bcd + 3acd + 5abd + 7abc = 9abcd$ . Заметим, что слева находятся 4 нечетных числа, а справа 1 нечетное число. Но сумма 4 нечетных – четное. Противоречие.

**8.2.** Назовём число нереальным, если оно равно сумме  $k \geq 2$  точных кубов, где  $k$  – сумма цифр числа. Например, 2025 нереальное число, т.к.  $2025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3$  и сумма цифр числа 2025 равна 9, при этом  $k = 9$ . Существует ли ещё хотя бы одно нереальное число?

**Ответ.** Да, существуют.

Например, число 2024, т.к.  $2024 = 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3$  и сумма цифр числа 2024 равна 8, или число  $3025 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 + 10^3$  и сумма цифр числа 3025 равна 10, или число  $2 = 1^3 + 1^3, \dots, 9 = 1^3 + 1^3 + \dots + 1^3$  (9 единиц).

**8.3.** В аудитории на олимпиаду по математике собрались 15 учеников, некоторые дружат друг с другом, причем дружба обоюдная. Может ли так оказаться, что среди них:

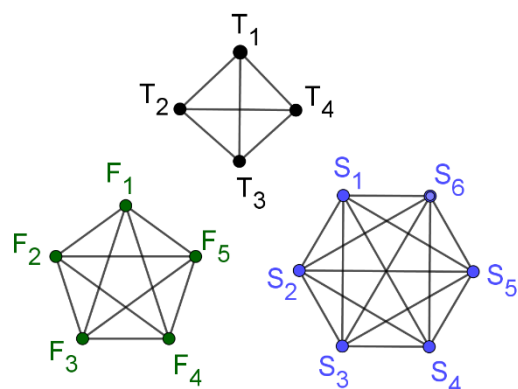
- а) 4 ученика имеют по 3 друга, 5 учеников – по 4 друга и 6 учеников – по 5 друзей;
- б) 4 ученика имеют по 4 друга, 5 учеников – по 5 друзей и 6 учеников – по 6 друзей.

**Ответ.** а) да, б) нет.

**Решение.** Учеников будем изображать точками. Тех, кто дружит, соединим отрезком. Задача моделируется графом, в котором вершины изображают учеников, а рёбра – отрезки между вершинами – дружбу.

а) Ответ положительный.

Примером являются 3 изолированных полных графа на 4, 5 и 6 вершинах.



- а). В примере у учеников  $T_1, \dots, T_4$  по 3 друга, у  $F_1, \dots, F_5$  по 4 друга и у  $S_1, \dots, S_6$  по 5 друзей.

б). Ответ отрицательный. На языке теории графов это объясняет лемма о рукопожатиях.

Так как одна дружба связывает 2 ученика, то общее количество всех друзей всех учеников должно быть чётным. Следовательно, количество учеников, имеющих нечётное количество друзей, должно быть чётным. В нашем случае нечётное количество по 5 друзей должны иметь 5 учеников – число нечётное. Поэтому такая ситуация невозможна.

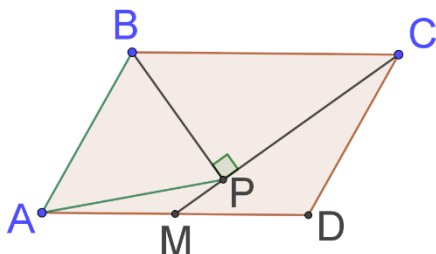
8.4. Вася закрашивает по одной в некотором порядке клетки изначально белого квадрата  $8 \times 8$ , вписывая в каждую новую закрашенную клетку число ранее закрашенных её соседних (по стороне) клеток. Какое наибольшее количество клеток с числом 4 могло у него оказаться по окончании закрашивания?

Ответ. 18.

	4		4		4		
		4		4		4	
	4		4		4		
		4		4		4	
	4		4		4		
		4		4		4	

**Решение.** 4 могла появиться только в клетке, не стоящей на краю, при этом четвёрки рядом не стоят, т.к. клетка, которая покрашена раньше соседки не может содержать 4. Центральный квадрат  $8 \times 8$  разбивается на 18 доминошек  $1 \times 2$ , в каждой из которых максимум одна 4, значит, четвёрок не больше 18. В качестве примера см. рис., где сначала закрашиваем в произвольном порядке все клетки без 4, а потом уже закрашиваем клетки, в которые ставим 4.

8.5.



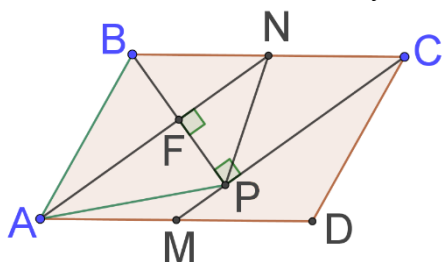
В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  – середина  $AD$ . Точка  $P$  на отрезке  $CM$  такая, что  $BP$  и  $CM$  перпендикулярны. Докажите, что треугольник  $ABP$  равнобедренный.

**Решение.** Отметим точку  $N$  – середину стороны  $BC$ .  $PN$  – медиана в прямоугольном треугольнике.

Поэтому  $PN = BN$ .

$ANCM$  – параллелограмм  $\Rightarrow AN \parallel CM$  и  $AN \perp BP$ .

Пусть  $AN$  пересекает  $BP$  в точке  $F$ . Тогда по теореме Фалеса  $BF = FP$ . Значит, в треугольнике  $BNP$  отрезок  $NF$  – высота и медиана. Следовательно,  $AN$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $BP$ . Поэтому  $AB = AP$  и треугольник  $ABP$  равнобедренный.



### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ (8 класс).

8.1. За полное обоснованное решение – 7 баллов.

8.2. За верный пример с проверкой – 7 баллов.

8.3. Только приведён пример в а) – 3 балла.

Дан только правильный ответ в пункте б) – 0 баллов.

Только доказан правильный ответ в б) – 3 балла.

Полностью решены оба пункта – 7 баллов.

**Примечание.** Одной ссылки на лемму о рукопожатиях недостаточно. Должно быть объяснение или доказательство.

8.4. Только ответ – 0 баллов.

За верный пример – 2 балла. Оценка – 4 балла.

8.5. За дополнительное построение: рассмотрена середина стороны  $BC$  – 1 балл.

Доказана перпендикулярность – 2 балла.

Использована теорема Фалеса – 2 балла.



# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА.

9.1. Решите уравнение  $g(x - 1) = g(2x - 1)$ , если  $g(x) = x^2 - 2023x + 2024$ .

**Ответ.**  $x = 0$ ,  $x = \frac{2025}{3}$ .

**Решение.**

$$g(x) = x^2 - 2023x + 2024.$$

$$(x - 1)^2 - 2023(x - 1) + 2024 = (2x - 1)^2 - 2023(2x - 1) + 2024,$$

$$x^2 - 2x + 1 - 2023x + 2023 = 4x^2 - 4x + 1 - 2 \cdot 2023x + 2023,$$

$$3x^2 - 4x + 2x - 2 \cdot 2023x + 2023x = 0,$$

$$3x^2 - 2025x = 0,$$

$$x = 0, \quad x = \frac{2025}{3}.$$

9.2. Найдите все натуральные  $n$ , для которых  $3^n + 56n$  — точный квадрат.

**Ответ.**  $n = 2$ .

**Решение.**

Рассмотрим сначала случай чётного  $n = 2k$ ,  $k = 1$  подходит:  $3^2 + 2 \cdot 56 = 121$  — квадрат.  $k = 2$  не подходит:  $3^4 + 4 \cdot 56 = 81 + 224 = 325 = 25 \cdot 13$  — не квадрат.  $k = 3$  не подходит:  $3^6 + 6 \cdot 56$  делится на 3, но не делится на 9.

При  $k \geq 4$  заметим, что следующий после  $3^{2k} = (3^k)^2$  нечётный точный квадрат равен  $(3^k + 2)^2 = 3^{2k} + 4(3^k + 1) > 3^{2k} + 4 \cdot 14k$ , поскольку при  $k \geq 4$  имеем  $3^k > 14k$  (это доказывается, например, индукцией по  $k$ :  $3^4 > 14 \cdot 4$ , и при увеличении  $k$  на 1 число  $3^k$  увеличивается на  $2 \cdot 3^k \geq 162$ , а число  $14k$  лишь на 14).

При нечётном  $n$  заметим, что  $3^n$  даёт остаток 3, 6 или 5 при делении на 7 (остатки степеней 3, начиная с  $3^0 = 1$ , при делении на 7 суть 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2 ...), а квадраты таких остатков при делении на 7 не дают.

9.3. Докажите, что для любых действительных чисел  $a, b, c$ , таких, что  $a, b, c \geq 1$ , выполняется неравенство

$$\frac{a^3 + b^3 + c}{ab} + \frac{b^3 + c^3 + a}{bc} + \frac{c^3 + a^3 + b}{ca} \geq 9.$$

**Решение.**

Применим неравенство Коши для трёх чисел:  $x^3 + y^3 + z \geq 3xy\sqrt[3]{z}$ .

Применим это неравенство к каждому числителю:

$$\frac{3ab\sqrt[3]{c}}{ab} + \frac{3bc\sqrt[3]{a}}{bc} + \frac{3ca\sqrt[3]{b}}{ca} \geq 9.$$

Сокращая и приводя подобные, получаем:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geq 3$ . Что очевидно, так как каждое из чисел не меньше 1.

**9.4.** Назовём три трёхзначных числа “тройняшками”, если каждое число состоит из трёх различных ненулевых цифр и все они являются полными перестановками друг друга (в разных разрядах стоят разные цифры). Существуют ли трёхзначные “тройняшки” такие, что одно число равно сумме двух других чисел?

**Ответ.** Не существуют.

**Решение.**

Запишем три трёхзначных числа в виде  $\overline{abc}$ ,  $\overline{pqr}$ ,  $\overline{xyz}$ , где наборы различных ненулевых цифр  $\{a, b, c\}$ ,  $\{p, q, r\}$ ,  $\{x, y, z\}$  совпадают. Предположим, что справедливо искомое равенство

$$\overline{abc} + \overline{pqr} = \overline{xyz}.$$

Рассмотрим несколько случаев в зависимости от числа переходов единицы в следующий разряд.

1). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abc}$ ,  $\overline{pqr}$  не происходит ни одного перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что выполнены равенства

$$a + p = x, \quad b + q = y, \quad c + r = z.$$

Сложим все равенства, получим

$$(a + p) + (b + q) + (c + r) = x + y + z, \Rightarrow \\ (a + b + c) + (p + q + r) = x + y + z.$$

Заметим, что суммы всех цифр равны

$$S = a + b + c = p + q + r = x + y + z,$$

поэтому равенство принимает вид

$$S + S = S, \Rightarrow S = 0,$$

что невозможно, поскольку все цифры различные.

2). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abc}$ ,  $\overline{pqr}$  происходит один переход единицы в следующий разряд. Это означает, что, например, выполнены равенства (если, например, переход происходит из последнего разряда в предпоследний)

$$a + p = x, \quad b + q + 1 = y, \quad c + r = 10 + z.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + p) + (b + q + 1) + (c + r) = x + y + (10 + z), \Rightarrow \\ (a + b + c) + (p + q + r) = (x + y + z) + 9.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 9, \Rightarrow S = 9.$$

Покажем, что это невозможно. Действительно, если имеется один переход единицы в следующий разряд, то сумма каких-то двух цифр, например,  $c$  и  $r$  больше 9, то есть  $c + r > 9$ . С другой стороны, эта сумма  $c + r$  есть сумма каких-то двух цифр набора  $\{a, b, c\}$ , например,  $c$  и  $b$ , то есть  $c + b > 9$ . Но это невозможно, поскольку сумма всех трёх цифр набора равна 9, то есть получим противоречие

$$S = a + b + c = 9 < c + b, \Rightarrow a < 0.$$

3). Наконец, пусть теперь при вычислении суммы чисел  $\overline{abc}$ ,  $\overline{pqr}$  происходит два перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что, например, выполнены равенства (так как переходы происходят из двух последних разрядов в предыдущие)

$$a + p + 1 = x, \quad b + q + 1 = 10 + y, \quad c + r = 10 + z.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + p + 1) + (b + q + 1) + (c + r) = x + (10 + y) + (10 + z), \Rightarrow$$

$$(a + b + c) + (p + q + r) = (x + y + z) + 18.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 18, \Rightarrow S = 18.$$

Покажем, что и это невозможно. Действительно, если имеется переход единицы в самый старший разряд, то сумма каких-то *различных* двух цифр  $a$  и  $p$  на единицу меньше *третьей* отличной от них цифры  $x$ , то есть, например, сумма двух цифр  $a$  и  $b$  на единицу меньше цифры  $c$ . Тогда получаем противоречие

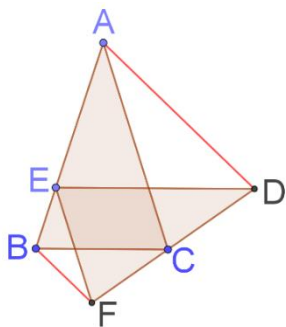
$$a + p + 1 = x, \Rightarrow a + b + 1 = c, \Rightarrow$$

$$S = 18 = a + b + c = a + b + (a + b + 1) = 2(a + b) + 1,$$

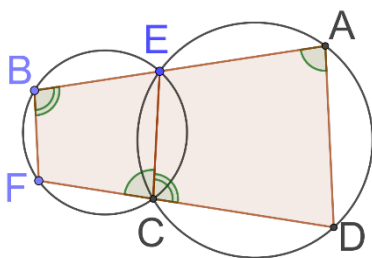
поскольку чётное число  $S = 18$  не равно нечётному числу  $2(a + b) + 1$ .

Таким образом, такие три трёхзначных числа не существуют.

- 9.5.** Равнобедренные треугольники  $ABC$  ( $AB = AC$ ) и  $DEF$  ( $DE = DF$ ) подобны и расположены так, что точка  $E$  принадлежит отрезку  $AB$ , а точка  $C$  принадлежит отрезку  $DF$ . Докажите, что прямые  $AD$  и  $BF$  параллельны.



**Решение.**



**Лемма.** Пусть прямые  $AB$  и  $DF$  проходят через концы общей хорды  $CE$  окружностей  $\omega_1, \omega_2$  и пересекают их в точках  $B, F$  и  $A, D$  соответственно. Тогда прямые  $BF$  и  $AD$  параллельны.

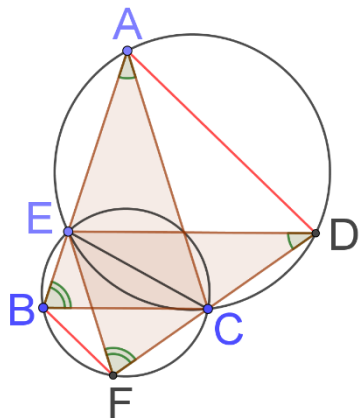
**Доказательство.**

Четырёхугольник  $AECD$  вписанный  $\Rightarrow \angle ECF = \angle EAD$ .

Четырёхугольник  $BECF$  вписанный  $\Rightarrow \angle ECD = \angle EBF$ . Но углы  $ECD$  и  $ECF$  смежные.

Так как сумма односторонних углов  $BAD$  и  $ABF$  равна  $180^\circ$ , то  $BF \parallel AD$ .

**Решение задачи.**



$\angle EAC = \angle EDC$ , как углы при вершинах подобных равнобедренных треугольников. Значит, отрезок  $EC$  из точек  $A$  и  $D$  виден под равными углами. Следовательно, четырёхугольник  $ADEC$  вписанный.

$\angle EBC = \angle EFC$ , как углы при основаниях подобных равнобедренных треугольников. Значит, отрезок  $EC$  из точек  $B$  и  $F$  виден под равными углами. Следовательно, четырёхугольник  $BECF$  вписанный.

По лемме прямые  $AD$  и  $BF$  параллельны.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ (9 класс).**

**9.1.** Допущена арифметическая ошибка – *снять 2 балла*.

За алгебраическую ошибку – *ставит 0 баллов*.

**9.2.** За верное решение – *7 баллов*.

Проверено, что  $n = 2$  подходит – *1 балл*

**9.3.** За верное решение – *7 баллов*.

Замечено неравенство Коши – *2 балла*.

**9.4.** Замечено, что возможная сумма цифр  $S$  в таких числах должна делиться на 9 – *1 балл*.

Получено противоречие при условии, что сумма цифр в таких числах равна  $S = 9$  – *2 балла*.

Получено противоречие при условии, что сумма цифр в таких числах равна  $S = 18$  – *4 балла*.

Любое другое верное и полностью обоснованное доказательство отсутствия такой тройки чисел оценивается в *7 баллов*.

**9.5.** Доказана вписанность  $ADEC$  или  $BECF$  – *2 балла*.

Доказаны обе вписанности – *3 балла*.

**Замечание.** Лемма или эквивалентное утверждение требуют доказательства.

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА.

**10.1.** Найти все пары натуральных чисел  $m$  и  $n$  такие, что

$$m^2 + 7mn - 98n^2 = 2025.$$

**Ответ.**  $m = 227, n = 32$ .

**Решение.**

Преобразуем левую часть равенства к виду

$$\begin{aligned} m^2 + 7mn - 98n^2 &= m^2 + 14mn - 7mn - 7 \cdot (-14) \cdot n^2 = \\ &= (m + 14n) \cdot (m - 7n), \end{aligned}$$

тогда уравнение примет вид

$$(m + 14n) \cdot (m - 7n) = 2025.$$

Заметим, что разность множителей  $m + 14n$  и  $m - 7n$  есть натуральное число, кратное 21:

$$m + 14n - (m - 7n) = 21n.$$

Запишем все разложения числа 2025 на натуральные множители такие, что первый множитель больше второго

$$2025 = 2025 \cdot 1 = 675 \cdot 3 = 225 \cdot 9 = 135 \cdot 15 = 81 \cdot 25 = 75 \cdot 27,$$

и заметим, что разность первого и второго множителей делится на 21 только для пары множителей 675 и 3, то есть

$$\begin{aligned} 2025 - 1 &= 2024 \not\div 21, \quad 675 - 3 = 672 = 21 \cdot 32 \div 21, \quad 225 - 9 = 216 \not\div 21, \\ 135 - 15 &= 120 \not\div 21, \quad 81 - 25 = 56 \not\div 21, \quad 75 - 27 = 48 \not\div 21. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m + 14n &= 675, \quad m - 7n = 3, \Rightarrow (m + 14n) - (m - 7n) = 675 - 3, \Rightarrow \\ 21n &= 672, \Rightarrow 21n = 32 \cdot 21, \Rightarrow n = 32, \quad m = 227. \end{aligned}$$

**10.2.** Назовём три четырёхзначных числа “тройняшками”, если каждое число состоит из четырёх различных ненулевых цифр и все они являются полными перестановками друг друга (в разных разрядах стоят разные цифры). Существуют ли четырёхзначные “тройняшки” такие, что одно число равно сумме двух других чисел?

**Ответ.** Существуют, например, тройка  $1467 + 6174 = 7641$ , или тройка  $2538 + 3285 = 5823$ .

**Решение.**

Запишем три четырёхзначных числа в виде  $\overline{abcd}, \overline{klmn}, \overline{pqrs}$ , где наборы различных ненулевых цифр  $\{a, b, c, d\}, \{k, l, m, n\}, \{p, q, r, s\}$  совпадают. Предположим, что справедливо искомое равенство

$$\overline{abcd} + \overline{klmn} = \overline{pqrs}.$$

Рассмотрим несколько случаев в зависимости от числа переходов единицы в следующий разряд.

1). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abcd}, \overline{klmn}$  не происходит **ни одного** перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что выполнены равенства

$$a + k = p, \quad b + l = q, \quad c + m = r, \quad d + n = s.$$

Сложим все равенства, получим

$$\begin{aligned} (a + k) + (b + l) + (c + m) + (d + n) &= p + q + r + s, \Rightarrow \\ (a + b + c + d) + (k + l + m + n) &= p + q + r + s. \end{aligned}$$

Заметим, что суммы всех цифр равны

$$S = a + b + c + d = k + l + m + n = p + q + r + s,$$

поэтому равенство принимает вид

$$S + S = S, \Rightarrow S = 0,$$

что невозможно, поскольку все цифры различные.

2). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abcd}$ ,  $\overline{klmn}$  происходит **один** переход единицы в следующий разряд. Это означает, что, например, выполнены равенства (если переход происходит из последнего разряда в предпоследний)

$$a + k = p, \quad b + l = q, \quad c + m + 1 = r, \quad d + n = 10 + s.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + k) + (b + l) + (c + m + 1) + (d + n) = p + q + r + (10 + s), \Rightarrow \\ (a + b + c + d) + (k + l + m + n) = (p + q + r + s) + 9.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 9, \Rightarrow S = 9,$$

что невозможно, поскольку сумма всех цифр не меньше

$$S = a + b + c + d \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9.$$

3). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abcd}$ ,  $\overline{klmn}$  происходит **три** перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что выполнены равенства (переходы происходят из всех разрядов, кроме первого)

$$a + k + 1 = p, \quad b + l + 1 = 10 + q, \quad c + m + 1 = 10 + r, \\ d + n = 10 + s.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + k + 1) + (b + l + 1) + (c + m + 1) + (d + n) = \\ = p + (10 + q) + (10 + r) + (10 + s), \Rightarrow \\ (a + b + c + d) + (k + l + m + n) = (p + q + r + s) + 27.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 27, \Rightarrow S = 27.$$

Это невозможно, поскольку если рассмотреть все возможные наборы цифр с такой суммой  $S = 27$ , то есть наборы 3, 7, 8, 9, или 4, 6, 8, 9, или 5, 6, 7, 9, то сумма каждой пары чисел из таких наборов не меньше 10, поэтому число переходов единицы в следующие разряды будет четыре, а не три, поэтому сумма чисел будет пятизначным, а не четырёхзначным числом.

4). Пусть теперь при вычислении суммы чисел  $\overline{abcd}$ ,  $\overline{klmn}$  происходит **два** перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что, например, выполнены равенства (если переходы происходят из двух последних разрядов в предыдущие)

$$a + k = p, \quad b + l + 1 = q, \quad c + m + 1 = 10 + r, \quad d + n = 10 + s.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + k) + (b + l + 1) + (c + m + 1) + (d + n) = p + q + (10 + r) + (10 + s), \\ (a + b + c + d) + (k + l + m + n) = (p + q + r + s) + 18.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 18, \Rightarrow S = 18,$$

что возможно, поскольку сумма всех цифр может принимать значение

$$S = a + b + c + d = 18,$$

например, для цифр 1, 4, 6, 7 справедливо  $S = 1 + 4 + 6 + 7 = 18$ . При этом можно подобрать соответствующий возможный пример трёх чисел с такими цифрами. Рассмотрим, какие суммы дают пары этих цифр:

$$1 + 4 = 5, \quad 1 + 6 = 7, \quad 1 + 7 = 8, \quad 4 + 6 = 10, \quad 4 + 7 = 11, \quad 6 + 7 = 13.$$

Среди этих чисел нет цифры 4, поэтому эта цифра может получиться только из последнего равенства после перехода единицы в следующий разряд. Среди этих чисел также нет цифры 6, поэтому эта цифра может получиться только из первого равенства после перехода единицы в следующий разряд. Цифра 7 может получиться только из третьего равенства. В двух равенствах должны получиться числа

большие 9, причём в одном из них должна использоваться единица, перешедшая из предыдущего разряда. Таким образом, возможное искомое равенство имеет вид

$$1746 + 4671 = 6417.$$

Заметим, что также из этих цифр можно составить ещё одно равенство

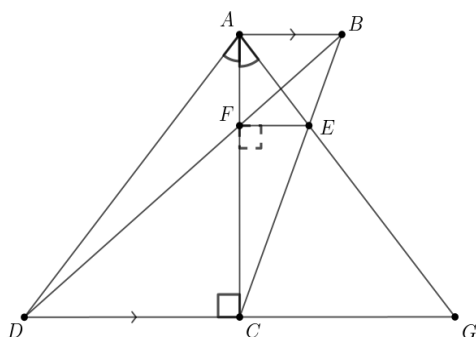
$$1467 + 6174 = 7641.$$

**Замечание.** Можно показать, что существует ещё только один набор цифр 2, 3, 5, 8, из которых можно составить два таких равенства

$$2538 + 3285 = 5823, \quad 2853 + 5382 = 8235.$$

**10.3.** В трапеции  $ABCD$ , с основаниями  $AB$  и  $CD$ , отрезки  $AC$  и  $CD$  перпендикулярны. На стороне  $BC$  выбрана точка  $E$  так, что  $\angle DAC = \angle CAE$ . Докажите, что прямая, проходящая через точку  $E$  и точку пересечения  $AC$  и  $BD$ , параллельна основаниям трапеции.

**Решение.**



Продлим  $AE$  до пересечения с  $CD$  в точке  $G$ , точку пересечения  $AC$  и  $BD$  обозначим  $F$ .

$$\triangle ECG \sim \triangle EBA \Rightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{AB}{CG}.$$

$$\triangle AFB \sim \triangle CFD \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AB}{CD}.$$

В  $\triangle ADG$ ,  $AC$  – биссектриса и высота, следовательно,

$$CG = CD.$$

$$\frac{AE}{EG} = \frac{AB}{CG} = \frac{AB}{CD} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel DC \parallel AB$$

**10.4.** Докажите, что для любых действительных чисел  $a, b, c$ , таких, что  $a, b, c \geq 1$ , выполняется неравенство

$$\frac{a^3 + b^3 + c}{a + b - 1} + \frac{b^3 + c^3 + a}{b + c - 1} + \frac{c^3 + a^3 + b}{c + a - 1} \geq 9.$$

**Решение.**

Докажем вспомогательное неравенство  $x + y - 1 \leq xy$ , для любых  $x, y \geq 1$ . Перенесём все в одну часть и сгруппируем, получим  $(x - 1)(y - 1) \geq 0$ . Что очевидно верно, т.к.  $x, y \geq 1$ .

Применим его к знаменателям дробей:

$$\frac{a^3 + b^3 + c}{ab} + \frac{b^3 + c^3 + a}{bc} + \frac{c^3 + a^3 + b}{ca} \geq 9.$$

Применим неравенство Коши для трёх чисел:  $x^3 + y^3 + z \geq 3xy\sqrt[3]{z}$ .

Применим это неравенство к каждому числителю:

$$\frac{3ab\sqrt[3]{c}}{ab} + \frac{3bc\sqrt[3]{a}}{bc} + \frac{3ca\sqrt[3]{b}}{ca} \geq 9.$$

Сокращая и приводя подобные, получаем:  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \geq 3$ . Что очевидно, так как каждое из чисел не меньше 1.

**10.5.** В языке лягушек используются три буквы — К, В и А. Словом является любая последовательность этих букв, в которой между любыми двумя буквами А есть хотя бы одна буква К (например, АВККА — это слово языка лягушек, а КАА — нет.) Сколько в языке лягушек слов из 10 букв?

**Ответ.** 17711.

**Решение.**

Рассмотрим последовательность Фибоначчи:  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ . Докажем, что для всякого натурального  $n$  выполняются следующие равенства:

- количество слов языка лягушек из  $n$  букв равно  $F_{2n+2}$ ;
- количество слов языка лягушек из  $n + 1$  букв, начинающихся на А, равно  $F_{2n+1}$ .

Индукция по  $n$ .

База  $n = 1$  проверяется непосредственно.

Переход от  $n - 1$  к  $n \geq 2$ .

Сначала докажем второе утверждение. Рассмотрим слово языка лягушек вида  $Ax \dots$  из  $n + 1$  буквы. Есть два варианта:  $x = К$  и  $x = В$ . В первом случае после второй буквы может идти произвольное слово языка лягушек из  $n - 1$  буквы, таких слов по индукционному предположению  $F_{2n}$ . Во втором случае, вычёркивая из нашего слова вторую букву получаем (опять же, произвольное) слово языка лягушек из  $n$  букв, начинающееся на А. Таких слов по индукционному предположению  $F_{2n-1}$ . Всего получается  $F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n+1}$  слов.

Теперь докажем первое утверждение. Если первая буква слова — К или В, после этой буквы идёт произвольное слово языка лягушек из  $n - 1$  буквы. Таких слов, получается,  $2F_{2n}$ . Если же первая буква А, то таких слов по индукционному предположению  $F_{2n-1}$ . Всего получается  $2F_{2n} + F_{2n-1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$  слов, что и требовалось.

Итак, ответ на вопрос задачи —  $F_{22} = 17711$ .

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ (10 класс).

**10.1.** Получено разложение для левой части равенства на множители — 2 балла.

Замечено, что множители натуральные и один из множителей должен быть больше другого — 1 балл.

Замечено, что разность множителей делится на 21 — 2 балла.

Верно, решена система уравнений для нахождения  $m$  и  $n$  — 2 балла.

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 7 баллов.

**10.2.** Показано, что сумма цифр искоемых чисел может быть равна 18 — 3 балла.

Любое верное и обоснованное требуемое равенство оценивается в 7 баллов.

**10.3.** Замечено подобие  $\triangle ECG$  и  $\triangle EBA$  — 1 балл.

Замечено подобие  $\triangle AFB$  и  $\triangle CFD$  — 1 балл.

За верное решение — 7 баллов.

**10.4.** Доказано вспомогательное неравенство — 2 балла

**10.5.** Верно получено рекуррентное соотношение, но неверно вычислен ответ — 6 баллов.

Получен только ответ (например, угадан по первым нескольким значениям) — 2 балла.



# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА.

11.1. Найти все пары натуральных  $m$  и  $n$  такие, что

$$m^2 - 6mn - 91n^2 = 2025.$$

**Ответ.**  $m = 93, n = 6$ .

**Решение.**

Преобразуем левую часть равенства к виду

$$\begin{aligned} m^2 - 6mn - 91n^2 &= m^2 + 7mn - 13mn + 7 \cdot (-13) \cdot n^2 = \\ &= (m + 7n) \cdot (m - 13n), \end{aligned}$$

тогда уравнение примет вид

$$(m + 7n) \cdot (m - 13n) = 2025.$$

Заметим, что разность множителей  $m + 7n$  и  $m - 13n$  есть натуральное число, кратное 20:

$$m + 7n - (m - 13n) = 20n.$$

Запишем все разложения числа 2025 на натуральные множители такие, что первый множитель больше второго

$$2025 = 2025 \cdot 1 = 675 \cdot 3 = 225 \cdot 9 = 135 \cdot 15 = 81 \cdot 25 = 75 \cdot 27,$$

и заметим, что разность первого и второго множителей делится на 20 только для пары множителей 135 и 15, то есть

$$2025 - 1 = 2024 \not\div 20, \quad 675 - 3 = 672 \not\div 20, \quad 225 - 9 = 216 \not\div 20,$$

$$135 - 15 = 120 \div 20, \quad 81 - 25 = 56 \not\div 20, \quad 75 - 27 = 48 \not\div 20.$$

Следовательно,

$$m + 7n = 135, \quad m - 13n = 15, \Rightarrow 20n = 120, \Rightarrow n = 6, \quad m = 93.$$

11.2. Назовём три пятизначных числа “тройняшками”, если каждое число состоит из пяти различных ненулевых цифр и все они являются полными перестановками друг друга (в разных разрядах стоят разные цифры). Существуют ли пятизначные “тройняшки” такие, что одно число равно сумме двух других чисел? Приведите пример или обоснуйте, что его нет.

**Ответ.** Существуют, например, тройка  $13428 + 21384 = 34812$ , или тройка  $24678 + 62784 = 87462$ .

**Решение.** Запишем три пятизначных числа в виде  $\overline{abcde}, \overline{jklmn}, \overline{uvxyz}$ , где наборы различных ненулевых цифр  $\{a, b, c, d, e\}, \{j, k, l, m, n\}, \{u, v, x, y, z\}$  совпадают. Предположим, что справедливо искомое равенство

$$\overline{abcde} + \overline{jklmn} = \overline{uvxyz}.$$

Рассмотрим несколько случаев в зависимости от числа переходов единицы в следующий разряд.

1). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abcde}, \overline{jklmn}$  не происходит **ни одного** перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что выполнены равенства

$$a + j = u, \quad b + k = v, \quad c + l = x, \quad d + m = y, \quad e + n = z.$$

Сложим все равенства, получим

$$(a + j) + (b + k) + (c + l) + (d + m) + (e + n) = u + v + x + y + z,$$

$$(a + b + c + d + e) + (j + k + l + m + n) = u + v + x + y + z.$$

Заметим, что суммы всех цифр равны

$$S = a + b + c + d + e = j + k + l + m + n = u + v + x + y + z,$$

поэтому равенство принимает вид

$$S + S = S, \quad \Rightarrow \quad S = 0,$$

что невозможно, поскольку все цифры различные.

2). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abcde}$ ,  $\overline{jklmn}$  происходит **один** переход единицы в следующий разряд. Это означает, что, например, выполнены равенства (если переход происходит из последнего разряда в предпоследний)

$$a + j = u, \quad b + k = v, \quad c + l = x, \quad d + m + 1 = y, \quad e + n = 10 + z.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + j) + (b + k) + (c + l) + (d + m + 1) + (e + n) = u + v + x + y + (10 + z),$$

$$(a + b + c + d + e) + (j + k + l + m + n) = (u + v + x + y + z) + 9.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 9, \Rightarrow S = 9,$$

что невозможно, поскольку сумма всех цифр не меньше

$$S = a + b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 9.$$

3). Пусть при вычислении суммы чисел  $\overline{abcde}$ ,  $\overline{jklmn}$  происходит **четыре** перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что выполнены равенства (переходы происходят из всех разрядов, кроме первого)

$$a + j + 1 = u, \quad b + k + 1 = 10 + v, \quad c + l + 1 = 10 + x,$$

$$d + m + 1 = 10 + y, \quad e + n = 10 + z.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + j + 1) + (b + k + 1) + (c + l + 1) + (d + m + 1) + (e + n) =$$

$$= u + (10 + v) + (10 + x) + (10 + y) + (10 + z), \Rightarrow$$

$$(a + b + c + d + e) + (j + k + l + m + n) = (u + v + x + y + z) + 36.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 36, \Rightarrow S = 36,$$

что невозможно, поскольку сумма всех цифр не больше

$$S = a + b + c + d + e \leq 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35 < 36.$$

4). Пусть теперь при вычислении суммы чисел  $\overline{abcde}$ ,  $\overline{jklmn}$  происходит **два** перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что, например, выполнены равенства (если переходы происходят из двух последних разрядов в предыдущие)

$$a + j = u, \quad b + k = v, \quad c + l + 1 = x,$$

$$d + m + 1 = 10 + y, \quad e + n = 10 + z.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + j) + (b + k) + (c + l + 1) + (d + m + 1) + (e + n) =$$

$$= u + v + x + (10 + y) + (10 + z),$$

$$(a + b + c + d + e) + (j + k + l + m + n) = (u + v + x + y + z) + 18.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 18, \Rightarrow S = 18,$$

что возможно, поскольку сумма всех цифр может принимать значение

$$S = a + b + c + d + e = 18,$$

например, для цифр 1, 2, 3, 4, 8 справедливо  $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 8 = 18$ . При этом можно подобрать соответствующий возможный пример трёх чисел с такими цифрами. Рассмотрим, какие суммы дают пары этих цифр:

$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 3 = 4, \quad 1 + 4 = 5, \quad 1 + 8 = 9, \quad 2 + 3 = 5,$$

$$2 + 4 = 6, \quad 2 + 8 = 10, \quad 3 + 4 = 7, \quad 3 + 8 = 11, \quad 4 + 8 = 12.$$

Среди этих чисел нет цифры 8, поэтому эта цифра может получиться только из восьмого равенства после перехода единицы в следующий разряд. Цифры 3 и 4 могут получиться только из первых

двух равенств. Поэтому в оставшихся двух равенствах должны получаться числа большие 9, причём в одном из них должна использоваться единица, перешедшая из предыдущего разряда. Таким образом, возможное искомое равенство имеет вид

$$13428 + 21384 = 34812.$$

Заметим, что также из этих цифр можно составить равенства

$$31428 + 12384 = 43812, \quad 14283 + 23841 = 38124, \quad 34281 + 13842 = 48123, \\ 42813 + 38421 = 81234, \quad 42831 + 38412 = 81243.$$

5). Наконец, пусть теперь при вычислении суммы чисел  $\overline{abcde}, \overline{jklmn}$  происходит **три** перехода единицы в следующий разряд. Это означает, что, например, выполнены равенства (если переходы происходят из последнего разряда в предпоследний и из предпоследнего разряда в предпредпоследний, и из из предпредпоследнего разряда в предпредпредпоследний)

$$a + j = u, \quad b + k + 1 = v, \quad c + l + 1 = 10 + x, \\ d + m + 1 = 10 + y, \quad e + n = 10 + z.$$

Снова сложим все равенства, получим

$$(a + j) + (b + k + 1) + (c + l + 1) + (d + m + 1) + (e + n) = \\ = u + v + (10 + x) + (10 + y) + (10 + z), \\ (a + b + c + d + e) + (j + k + l + m + n) = (u + v + x + y + z) + 27.$$

Снова, поскольку суммы всех цифр равны, равенство принимает вид

$$S + S = S + 27, \Rightarrow S = 27,$$

что возможно, поскольку сумма всех цифр может принимать значение

$$S = a + b + c + d + e = 27,$$

например, для цифр 2, 4, 6, 7, 8 справедливо  $S = 2 + 4 + 6 + 7 + 8 = 27$ . При этом также можно подобрать соответствующий возможный пример трёх чисел с такими цифрами:

$$24678 + 62784 = 87462.$$

Заметим, что также из этих цифр можно составить равенства

$$24768 + 62874 = 87642, \quad 46782 + 27846 = 74628, \quad 47682 + 28746 = 76428.$$

Замечание. Можно показать, что существуют и другие наборы цифр, из которых можно составить искомое равенство. Всего существует 90 различных таких равенств.

### 11.3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^{11} x - 11 = 11 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x - \dots - \operatorname{ctg}^{11} x.$$

**Ответ.**  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Решение.** Область допустимых значений уравнения:  $x \neq \frac{\pi}{2} m, m \in \mathbb{Z}$ . Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \dots + \operatorname{tg}^{11} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x + \dots + \operatorname{ctg}^{11} x = 22,$$

или в виде

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x + \dots + \operatorname{tg}^{11} x + \operatorname{ctg}^{11} x = 22,$$

или в виде

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} + \dots + \operatorname{tg}^{11} x + \frac{1}{\operatorname{tg}^{11} x} = 22.$$

Обозначим  $\operatorname{tg} x = t$ , тогда  $t \neq 0$ , и уравнение примет вид

$$t + \frac{1}{t} + t^2 + \frac{1}{t^2} + t^3 + \frac{1}{t^3} + \dots + t^{11} + \frac{1}{t^{11}} = 22.$$

Рассмотрим два случая.

1). Пусть сначала  $t > 0$ . Заметим, что при любом  $k = 1, 2, 3, \dots, 11$  справедливо неравенство

$$t^k + \frac{1}{t^k} \geq 2 \cdot t^k \cdot \frac{1}{t^k} = 2,$$

причём равенство достигается лишь при условии, что  $t^k = \frac{1}{t^k}$ , то есть при  $\frac{t^{2k}-1}{t^k} = 0$ , или при  $t = 1$ . Тогда

левая часть уравнения всегда не меньше правой его части

$$t + \frac{1}{t} + t^2 + \frac{1}{t^2} + t^3 + \frac{1}{t^3} + \dots + t^{11} + \frac{1}{t^{11}} \geq \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{11 \text{ штук}} = 22,$$

причём равенство достигается лишь при условии, что при всех  $k = 1, 2, 3, \dots, 11$  справедливо  $t^k = \frac{1}{t^k}$ , то есть при  $t = 1$ . Поэтому  $\operatorname{tg} x = 1$ , откуда  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

2). Пусть теперь  $t < 0$ . Преобразуем левую часть уравнения с помощью формулы для суммы геометрической прогрессии к виду

$$\begin{aligned} t + t^2 + t^3 + \dots + t^{11} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \dots + \frac{1}{t^{11}} &= \frac{t(1-t^{11})}{1-t} + \frac{\frac{1}{t}(1-\frac{1}{t^{11}})}{1-\frac{1}{t}} = \\ &= \frac{t(1-t^{11})}{1-t} + \frac{t^{11}-1}{t^{11}(t-1)} = \frac{1-t^{11}}{1-t} \cdot \left(t + \frac{1}{t^{11}}\right) = t \cdot \frac{1-t^{11}}{1-t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t^{10}}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что выражение в скобке  $1 + \frac{1}{t^{10}} > 0$  положительное при  $t \neq 0$ . Также заметим, что при любых  $t < 0$  разности  $1 - t^{11} > 0$  и  $1 - t > 0$  также обе положительные, поэтому дробь перед скобкой также положительная  $\frac{1-t^{11}}{1-t} > 0$  и, значит, левая часть уравнения отрицательная

$$t + t^2 + t^3 + \dots + t^{11} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \dots + \frac{1}{t^{11}} = \underbrace{t}_{<0} \cdot \underbrace{\frac{1-t^{11}}{1-t}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t^{10}}\right)}_{>0} < 0,$$

следовательно, уравнение не имеет корней при  $t < 0$ .

**11.4.** Числа  $x, y, z, t$  таковы, что  $0 < x, y, z, t < \frac{1}{2}$ . Доказать, что

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) < 1.$$

**Решение первое.** Запишем левую часть неравенства в виде линейной функции от переменной  $x$ , то есть обозначим

$$f(x) = (1-y-t)x + (y+z+t-zy-zt).$$

Тогда если неравенство  $f(x) < 1$  будет выполнено при  $x = 0$  и при  $x = \frac{1}{2}$ , то оно будет выполнено и при всех  $0 < x < \frac{1}{2}$  (при любых фиксированных  $y, z, t$ ).

Рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} f(0) < 1, &\Leftrightarrow y + z + t - zy - zt < 1, \Leftrightarrow \\ y + t - 1 + z - zy - zt &< 0, \Leftrightarrow \\ y + t - 1 + z(1-y-t) &< 0, \Leftrightarrow \\ (y+t-1)(1-z) &< 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верное, поскольку  $0 < t < \frac{1}{2}$ ,  $0 < y < \frac{1}{2}$ ,  $0 < z < \frac{1}{2}$  и, значит,  $0 < y + t < 1$ , поэтому  $\frac{1}{2} < 1 - z < 1$  и  $-1 < y + t - 1 < 0$ .

Рассмотрим неравенство

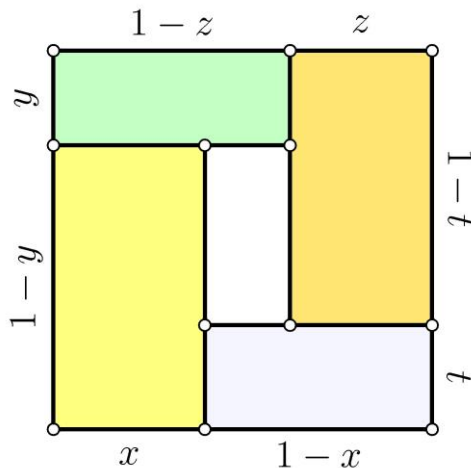
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) < 1, &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot (1-y-t) + y + z + t - zy - zt < 1, \Leftrightarrow \\ 1 - y - t + 2y + 2z + 2t - 2zy - 2zt &< 2, \Leftrightarrow \\ -1 + y + t + 2z - 2zy - 2zt &< 0, \Leftrightarrow \\ -1 + y + t + 2z(1-y-t) &< 0, \Leftrightarrow \\ (1-y-t)(2z-1) &< 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство также верное, поскольку  $0 < t < \frac{1}{2}$ ,  $0 < y < \frac{1}{2}$ ,  $0 < z < \frac{1}{2}$ , тогда

$$0 < 2z < 1, \text{ и поэтому } 0 < y + t < 1 \text{ и } -1 < 2z - 1 < 0.$$

Теперь, выбирая любую другую переменную и фиксируя оставшуюся тройку чисел, получаем, что неравенство верно для любых значений  $x, y, z, t$  таких, что  $0 < x, y, z, t < \frac{1}{2}$ .

**Решение второе.** Рассмотрим квадрат со стороной, равной 1, и отметим на его четырёх сторонах отрезки, равные  $x, y, z, t$  так, как показано на рисунке.



Тогда пара прямоугольников со сторонами  $x$  и  $1-y$ ,  $z$  и  $1-t$ , а также пара прямоугольников со сторонами  $y$  и  $1-z$ ,  $t$  и  $1-x$  не пересекаются друг с другом. Поэтому сумма площадей всех четырёх прямоугольников не превосходит площади квадрата, то есть выполняется неравенство

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 < S, \Leftrightarrow \\ x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) < 1,$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** Заметим, что если предположить, что  $0 < x, y, z, t < 1$ , то искомое неравенство выполняться не будет, например, при  $x, z$ , близких к 0, и при  $y, t$  близких к 1, выражение

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) \text{ будет близко к } 2.$$

Однако, можно показать, что в этом случае будет верным неравенство

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) < 2.$$

Действительно, заметим, что при  $0 < x, y, z, t < 1$  справедливо

$$x(1-y) + y(1-z) < 1 \cdot (1-y) + y \cdot 1 = 1 - y + y = 1, \\ z(1-t) + t(1-x) < 1 \cdot (1-t) + t \cdot 1 = 1 - t + t = 1,$$

поэтому

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) < 1 + 1 = 2.$$

**11.5.** Будем говорить, что ребро  $AB$  тетраэдра  $DABC$  удачное, если его середина равноудалена от вершин  $C$  и  $D$ . Докажите, что если все рёбра  $AB, BC, CA$  – удачные, то все грани тетраэдра равны.

**Решение.**

Пусть  $M, N, K$  – середины рёбер  $AB, BC$  и  $AC$  соответственно.

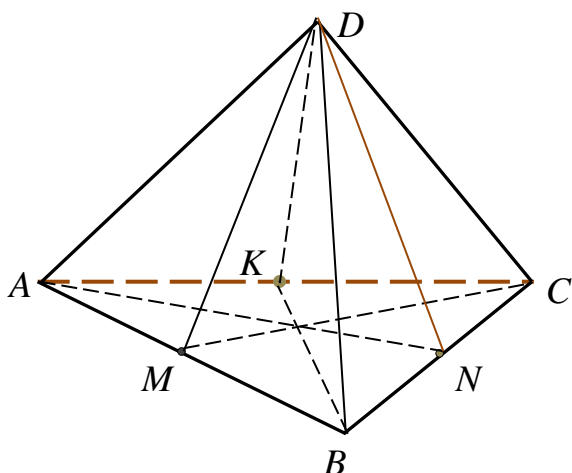
Так как рёбра  $AB, BC, CA$  – удачные, то  $DM = CM, DN = AN, DK = BK$ .

Используя формулу длины медианы, получаем:

$$4DM^2 = 2AD^2 + 2BD^2 - AB^2, \quad 4CM^2 = 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2 \Rightarrow \\ AD^2 + BD^2 = AC^2 + BC^2; (1)$$

$$4DN^2 = 2BD^2 + 2CD^2 - BC^2, \quad 4AN^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 \Rightarrow \\ BD^2 + CD^2 = AB^2 + AC^2; (2)$$

$$4DK^2 = 2AD^2 + 2CD^2 - AC^2, 4BK^2 = 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2 \Rightarrow AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2; (3)$$



Складывая почленно равенства (1) и (2), вычитая равенство (3), получаем:

$$2BD^2 = 2AC^2.$$

Складывая почленно равенства (2) и (3), вычитая равенство (1), получаем:

$$2CD^2 = 2AB^2.$$

Складывая почленно равенства (1) и (3), вычитая равенство (2), получаем:

$$2AD^2 = 2BC^2.$$

Итак,  $AC=BD$ ,  $AB=CD$ ,  $BC=AD$ , значит все грани тетраэдра равны.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ (11 класс).**

**11.1.** Получено разложение для левой части равенства на множители – 2 балла.

Замечено, что множители натуральные и один из множителей должен быть больше другого – 1 балл.

Замечено, что разность множителей делится на 20 – 2 балла.

Верно решена система уравнений для нахождения  $m$  и  $n$  – 2 балла.

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 7 баллов.

**11.2.** Показано, что сумма цифр искомых чисел может быть равна 18 или 27 – 3 балла.

Любое *верное и обоснованное* требуемое равенство оценивается в 7 баллов.

**11.3.** Уравнение верно решено при условии  $\operatorname{tg} x > 0$  – 4 балла.

Доказано, что уравнение не имеет корней при условии  $\operatorname{tg} x < 0$  – 3 балла.

Верно применена формула суммы геометрической прогрессии при условии  $\operatorname{tg} x < 0$  (при отсутствии верного обоснования того факта, что уравнение не имеет корней при условии  $\operatorname{tg} x < 0$ ) – 1 балл.

Не указана область допустимых значений уравнения – **снимается 1 балл.**

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 7 баллов.

**11.4.** Имеется идея рассматривать выражение при некоторых фиксированных значениях переменных – *2 балла.*

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 7 баллов.

**11.5.** Написаны нужные равенства из формулы для длины медианы, но не сделан вывод о равенстве длин противоположных рёбер – 2 балла.

Любое верное и обоснованное решение оценивается в 7 баллов.