

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП (10 класс)

**10.1.** Найти все пары натуральных чисел  $m$  и  $n$  такие, что  
 $m^2 + 7mn - 98n^2 = 2025$ .

**10.2.** Назовём три четырёхзначных числа “тройняшками”, если каждое число состоит из четырёх различных ненулевых цифр и все они являются полными перестановками друг друга (в разных разрядах стоят разные цифры). Существуют ли четырёхзначные “тройняшки” такие, что одно число равно сумме двух других чисел?

**10.3.** В трапеции  $ABCD$ , с основаниями  $AB$  и  $CD$ , отрезки  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны. На стороне  $BC$  выбрана точка  $E$  так, что  $\angle DAC = \angle CAE$ . Докажите, что прямая, проходящая через точку  $E$  и точку пересечения  $AC$  и  $BD$ , параллельна основаниям трапеции.

**10.4.** Докажите, что для любых действительных чисел  $a, b, c$ , таких, что  $a, b, c \geq 1$ , выполняется неравенство

$$\frac{a^3 + b^3 + c}{a + b - 1} + \frac{b^3 + c^3 + a}{b + c - 1} + \frac{c^3 + a^3 + b}{c + a - 1} \geq 9.$$

**10.5.** В языке лягушек используются три буквы — К, В и А. Словом является любая последовательность этих букв, в которой между любыми двумя буквами А есть хотя бы одна буква К (например, АВККА — это слово языка лягушек, а КАА — нет.) Сколько в языке лягушек слов из 10 букв?

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП (10 класс)

**10.1.** Найти все пары натуральных чисел  $m$  и  $n$  такие, что  
 $m^2 + 7mn - 98n^2 = 2025$ .

**10.2.** Назовём три четырёхзначных числа “тройняшками”, если каждое число состоит из четырёх различных ненулевых цифр и все они являются полными перестановками друг друга (в разных разрядах стоят разные цифры). Существуют ли четырёхзначные “тройняшки” такие, что одно число равно сумме двух других чисел?

**10.3.** В трапеции  $ABCD$ , с основаниями  $AB$  и  $CD$ , отрезки  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны. На стороне  $BC$  выбрана точка  $E$  так, что  $\angle DAC = \angle CAE$ . Докажите, что прямая, проходящая через точку  $E$  и точку пересечения  $AC$  и  $BD$ , параллельна основаниям трапеции.

**10.4.** Докажите, что для любых действительных чисел  $a, b, c$ , таких, что  $a, b, c \geq 1$ , выполняется неравенство

$$\frac{a^3 + b^3 + c}{a + b - 1} + \frac{b^3 + c^3 + a}{b + c - 1} + \frac{c^3 + a^3 + b}{c + a - 1} \geq 9.$$

**10.5.** В языке лягушек используются три буквы — К, В и А. Словом является любая последовательность этих букв, в которой между любыми двумя буквами А есть хотя бы одна буква К (например, АВККА — это слово языка лягушек, а КАА — нет.) Сколько в языке лягушек слов из 10 букв?