

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП (11 класс)

11.1. Найти все пары натуральных m и n такие, что

$$m^2 - 6mn - 91n^2 = 2025.$$

11.2. Назовём три пятизначных числа “тройняшками”, если каждое число состоит из пяти различных ненулевых цифр и все они являются полными перестановками друг друга (в разных разрядах стоят разные цифры). Существуют ли пятизначные “тройняшки” такие, что одно число равно сумме двух других чисел? Приведите пример или обоснуйте, что его нет.

11.3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^{11} x - 11 = 11 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x - \dots - \operatorname{ctg}^{11} x.$$

11.4. Числа x, y, z, t таковы, что $0 < x, y, z, t < \frac{1}{2}$. Доказать, что

$$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - t) + t(1 - x) < 1.$$

11.5. Будем говорить, что ребро AB тетраэдра $DABC$ удачное, если его середина равноудалена от вершин C и D . Докажите, что если все рёбра AB, BC, CA – удачные, то все грани тетраэдра равны.

ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП (11 класс)

11.1. Найти все пары натуральных m и n такие, что

$$m^2 - 6mn - 91n^2 = 2025.$$

11.2. Назовём три пятизначных числа “тройняшками”, если каждое число состоит из пяти различных ненулевых цифр и все они являются полными перестановками друг друга (в разных разрядах стоят разные цифры). Существуют ли пятизначные “тройняшки” такие, что одно число равно сумме двух других чисел? Приведите пример или обоснуйте, что его нет.

11.3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \dots + \operatorname{tg}^{11} x - 11 = 11 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x - \dots - \operatorname{ctg}^{11} x.$$

11.4. Числа x, y, z, t таковы, что $0 < x, y, z, t < \frac{1}{2}$. Доказать, что

$$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - t) + t(1 - x) < 1.$$

11.5. Будем говорить, что ребро AB тетраэдра $DABC$ удачное, если его середина равноудалена от вершин C и D . Докажите, что если все рёбра AB, BC, CA – удачные, то все грани тетраэдра равны.